# SF1624 Algebra och geometri

## Tjugofemte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

10 december, 2009

# Tentamens struktur

- Tentamen består av tio uppgifter uppdelade på två delar, Del A och Del B.
- Del A består av sex uppgifter och ska visa på grund för godkänt betyg
- Del B består av fyra uppgifter som ska visa på grunder för högre betyg än D

Betygen ges av

| **Betyg** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **Fx** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 31 | 26 | 21 | 18 | 16 | 14 |
| varav från del B | 11 | 7 | 3 | - | - | - |

Den som nått målen i kursen ska klara uppgifterna i del A utan bonuspoäng.

# Bedömningskriterier

På tentamenslydelsen står:

- Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl!
- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna.
- Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

I allmänhet ger mindre räknefel inget poängavdrag om de inte leder till att uppgiftens karaktär ändras.

# Tentamen den 23 oktober 2009

Vi tittar först på den tentamen som gick den 23 oktober 2009. Årets tentamina skiljer sig från tidigare år genom

- mer fokus på begreppsförståelse och generella metoder än på räknefärdighet.
- mer fokus på att kunna kommunicera genom att förklara hur och varför man räknar på ett visst sätt.

Allt detta är en del i ett förbättringsarbete som utförs på institutionen för matematik och som syftar till roligare och mer meningsfull matematik i civilingenjörsprogrammen.

# Uppgift 1

a) Bestäm de övriga rötterna till ekvationen

$$z^3 - 11z^2 + 43z - 65 = 0$$

när det är känt att en av rötterna är $3 - 2i$. **(3)**

b) Förklara varför de komplexa rötterna till en tredjegradsekvation med reella koefficienter förekommer i konjugerade par. **(1)**

# Uppgift 2

a) Avgör för vilka värden på parametern $t$ som de tre vektorerna

$$(1-t, 0, 1, 1), \quad (2, 6-t, 0, 2) \quad \text{och} \quad (1, 4, 1, 3)$$

är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^4$. **(3)**

b) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende. **(1)**

# Uppgift 3

Använd linjen $(x, y, z) = (2, 1, -1) + t(0, 1, -2)$ och punkten $(0, 1, 1)$ för att visa hur man med hjälp av projektion finner den punkt på en given linje som ligger närmast en given punkt. **(4)**

# Uppgift 4

Vid lösningen av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 1, \\ & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5, \end{cases}$$

kommer man genom Gausselimination fram till matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right).$$

a) Skriv upp den matris som hör till det givna systemet och utför de radoperationer som krävs för att få den på trappform. **(1)**

b) Ange lösningsmängden till ekvationssystemet. **(2)**

c) Tillhör punkten $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 12, 4, -9)$ lösningsmängden? **(1)**

# Uppgift 5

a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**(3)**

b) Förklara varför alla egenvärden till en kvadratisk matris, $A$, måste uppfylla den *karaktäristiska ekvationen*[1], $\det(A - \lambda I) = 0$. **(1)**

[1] också kallad *sekularekvationen* och skrivs ibland $\det(\lambda I - A) = 0$

# Uppgift 6

a) Förklara vad som menas med att en avbildning $T$ från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ är linjär. **(1)**

b) Bestäm matrisen med avseende på standardbasen för den linjära avbildning $T$ från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \text{och } T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

**(3)**

# Uppgift 7

Vi har två baser i $\mathbf{R}^3$ givna av

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

och känner till att en basbytesmatris mellan baserna ges av

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Det är ofta svårt att komma ihåg åt vilket håll basbytet går. Red ut detta genom att använda matrisen ovan för att bestämma koordinaterna relativt basen $F$ för den vektor som har koordinaterna $(a, b, c)$ relativt basen $G$. **(2)**

b) Bestäm matrisen för det omvända basbytet. **(2)**

# Uppgift 8

a) Förklara varför egenvektorer som hör till olika egenvärden till en symmetrisk matris måste vara ortogonala mot varandra. **(2)**

b) Bestäm en symmetrisk matris med egenvärdena $-1$ och $4$ och där $(4, -3)$ en egenvektor till det första egenvärdet. **(2)**

# Uppgift 9

Enligt en modell för en elektrisk krets uppfyller strömmen $i(t)$ uppmätt vid jämna tidsintervall en rekursionsekvation

$$i_{n+2} = ai_{n+1} + bi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

där $a$ och $b$ är konstanter. Vid en mätning har man mätt upp strömmens värde vid ett antal tidpunkter och har därmed mätdata i en vektor $(i_1, i_2, \ldots, i_5)$. Beskriv hur man kan använda minsta-kvadratmetoden för att finna de värden på konstanterna $a$ och $b$ som bäst stämmer överens med mätningarna. Illustrera metoden genom att utföra den i fallet då vi har fem mätvärden $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (1, 2, 2, 1, 0)$ mA. **(4)**

# Uppgift 10

Spåret av en kvadratisk matris $A$ ges av summan av diagonalelementen och betecknas med $\operatorname{tr} A$. Låt $\{a_n\}$ vara talföljden som definieras genom

$$a_n = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^n, \qquad \text{för alla heltal } n \geq 1.$$

Visa att följden uppfyller den linjära rekursionsekvationen

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$$

för alla heltal $n \geq 1$, exempelvis genom att använda att $A^2 = 4A + 5I$. **(4)**

# Uppgift 1 (modelltentamen)

a) Definiera begreppen *rektangulär form* och *polär form* för komplexa tal och ange sambandet mellan dem. **(2)**

b) Ange rötterna till ekvationen $z^2 + 2z + 4 = 0$ på polär form. **(2)**

# Uppgift 2 (modelltentamen)

a) Använd Gausselimination för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 32, \\ 3x - 2y = -11, \\ 2x + 12y - 20z = 171. \end{cases}$$

**(3)**

b) På vilket sätt ändrar sig lösningen om det sista talet i högerledet ändras från 171 till 172? **(1)**

# Uppgift 3 (modelltentamen)

a) Avgör vilka tre av vektorerna $(1, 2, 1)$, $(3, 4, 2)$, $(3, 2, 1)$ och $(0, 1, 2)$ som är egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 30 & -40 & 26 \\ 15 & -26 & 25 \end{pmatrix}$$

och bestäm motsvarande egenvärden. **(2)**

b) Visa att matrisen $A$ är diagonaliserbar genom att finna en matris $P$ och en diagonalmatris $D$ så att $P^{-1}AP = D$. **(2)**

# Uppgift 4 (modelltentamen)

a) Använd vektorprodukten för att finna en linje som är vinkelrät mot det plan som innehåller de tre punkterna $A = (0, 1, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ och $C = (-1, 0, 3)$. **(2)**

b) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 1, 2)$ till samma plan genom projektion på en linje som är vinkelrät mot planet. **(2)**

# Uppgift 5 (modelltentamen)

a) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. **(2)**

b) Bestäm för vilka värden för $a$ som de tre vektorerna $(1, a, 2)$, $(2, 1, 4)$ och $(a, 4, -1)$ är linjärt oberoende. **(2)**

# Uppgift 6 (modelltentamen)

Vid en mätning har följande mätvärden erhållits:

| $t$ (ms) | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|
| $x(t)$ (mm) | 2,1 | 2,4 | 2,8 |

Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden de konstanter $a$ och $b$ som bäst stämmer överens med mätningarna om modellen för förloppet säger att $x(t) = at + b$. (Tänk på att ange $a$ och $b$ med rätt enheter.) **(4)**

# Uppgift 7 (modelltentamen)

De fyra punkterna $(1, 3, 2)$, $(5, 3, 2)$, $(4, 2, 4)$ och $(4, 4, 1)$ ligger alla i samma plan.

a) Förklara varför det inte finns någon linjär avbildning som skickar dessa fyra punkter på $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ och $(1, 1, 1)$. **(2)**

b) Beskriv hur man kan finna matrisen för en linjär avbildning som sänder de tre första punkterna till $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. **(2)**

# Uppgift 8 (modelltentamen)

I basen som ges av de tre vektorerna $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ och $(1, 1, 1)$ har den linjära avbildningen för en spegling i planet $x + y + z = 0$ den enkla formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ange matrisen för samma linjära avbildning med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$, dvs för basen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
**(4)**

# Uppgift 9 (modelltentamen)

Vi kan identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ genom att $x + iy$ svarar mot $(x, y)$. Visa att multiplikation med det komplexa talet $a + bi$ då motsvarar en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och bestäm matrisen för den avbildningen med avseende på standardbasen. **(4)**

# Uppgift 10 (modelltentamen)

Betrakta matrisekvationen

$$X^2 + X + I = 0$$

a) Ge exempel på en $2 \times 2$-matris $X$ som uppfyller ekvationen. **(1)**

b) Visa att alla matriser[2] som uppfyller ekvationen har determinant 1. **(3)**

[2] med reella element